3.8 Déterminants de Cauchy, de Gram et théorème de Müntz (149, 201, 206, (209)) [19] [20]

Je me suis rendu compte que, étant donné que le développement sur les matrices circulantes et les suites de polygones est vraiment bof à mettre dans la leçon déterminant, il me manquait un développement dans cette leçon... Heureusement, j'ai trouvé ce beau résultat de densité à la Weierstrass, mais avec moins de polynômes, qui utilise les déterminants de Gram et de Cauchy ! Le recasage est vraiment pas top mais c'est pas ce qui m'intéresse là.

Théorème 3.28 (Müntz)**.** Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs (resp. une suite strictement croissante de réels positifs telle que $\alpha_0 = 0$ et dont la limite est strictement supérieure à 1). Notons V le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ suivant :

$$V = \operatorname{Vect}\left(\{x \mapsto x^{\alpha_n},\ n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Alors V est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ (resp. dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$) si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Dans la preuve de ce théorème nous aurons besoin de deux résultats utilisant les déterminants. Le premier étant le calcul des déterminants de Cauchy :

Proposition 3.29 (Déterminant de Cauchy)**.** Soit K un corps de caractéristique 0, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in K^n$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_i + b_j \neq 0.$$

Alors, on a :

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}.$$

Démonstration. Notons Δ_n le déterminant à calculer. On va raisonner par récurrence sur n. On a déjà, pour $n = 1$:

$$\Delta_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}.$$

Le résultat est alors initialisé pour $n = 1$. Prenons donc $n \geqslant 2$. Le but va être d'effectuer des opérations sur la dernière ligne pour pouvoir développer le déterminant facilement. On remarque déjà que si les a_i ne sont pas deux à deux distincts, alors le déterminant est nul et la formule est vérifiée. Dans le cas contraire, on remarque qu'en effectuant l'opération :

$$L_n \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ et $\lambda_n \neq 0$, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{pmatrix}$$

où R est la fraction rationnelle :
$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X + a_i}.$$
Étant donné que les a_i ont été choisis deux à deux distincts, on peut modifier les λ_i pour obtenir n'importe quelle fraction rationnelle de la forme :
$$\frac{Q(X)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X + a_i)}$$
que l'on veut ! C'est la décomposition en éléments simples (on doit tout de même imposer que Q soit de degré strictement inférieur à n) ! Quelle fraction rationnelle pourrait être intéressante pour poursuivre le calcul ? Une fraction telle que $R(b_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$! Prenons donc :
$$R = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - X)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X + a_i)}.$$
On peut alors avoir une expression explicite pour nos λ_i :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}(a_i - a_k)} \neq 0.$$
Il est donc licite d'effectuer les opérations élémentaires plus haut et on a donc :
$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix} = \frac{R(b_n)}{\lambda_n}\Delta_{n-1} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - b_n)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)} \times \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - a_n)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_n)}\Delta_{n-1}.$$
On a alors, par hypothèse de récurrence :
$$\Delta_n = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n}(a_i + b_j)},$$
ce qui est bien le résultat souhaité ! $\square$

Le deuxième résultat concerne les déterminants de Gram :

Proposition 3.30 (Déterminants de Gram et distance à un sous-espace)**.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, dont une base est notée $(e_1, \ldots, e_n)$. On rappelle que, pour une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$, on appelle *matrice de Gram* associée aux vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, et on note $G(x_1, \ldots, x_m)$ son déterminant. Alors on a :
$$\forall x \in E, \quad d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}.$$

Remarque 3.8.1. *Le déterminant de Gram $G(x_1,\dots,x_n)$ s'annule si et seulement si la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée. En effet, ce déterminant est nul si et seulement si :*

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\ \forall j\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x_j,x_i\rangle=0.$$

Si la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée, alors :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i=0.$$

Ainsi, en prenant le produit scalaire contre x_j on a bien :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\ \forall j\in[\![1,n]\!],\quad \left\langle x_j,\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\rangle=\sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x_j,x_i\rangle=0.$$

Réciproquement, le fait que :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\ \forall j\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x_j,x_i\rangle=0,$$

implique :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\quad \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \lambda_j\lambda_i\langle x_j,x_i\rangle=0$$

et donc :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\quad \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|^2=0$$

ce qui donne :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i=0$$

Démonstration. En notant $p_F : E\longrightarrow F$ la projection orthogonale sur F, on sait que, pour $x\in E$, on a :

$$d(x,F)^2=\|x-p_F(x)\|^2.$$

Notons y le vecteur $p_F(x)$ et z le vecteur $x-p_F(x)=x-y$. On remarque alors que :

$$\begin{aligned}
G(e_1,\dots,e_n,x) &= \begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle & \langle e_1,x\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle & \langle e_n,x\rangle\\ \langle x,e_1\rangle & \cdots & \langle x,e_n\rangle & \|x\|^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle & \langle e_1,y\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle & \langle e_n,y\rangle\\ \langle y,e_1\rangle & \cdots & \langle y,e_n\rangle & \|y\|^2+\|z\|^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle & \langle e_1,y\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle & \langle e_n,y\rangle\\ \langle y,e_1\rangle & \cdots & \langle y,e_n\rangle & \|y\|^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle & 0\\ \langle y,e_1\rangle & \cdots & \langle y,e_n\rangle & \|z\|^2\end{vmatrix}\\
&= G(e_1,\dots,e_n,y)+\|z\|^2G(e_1,\dots,e_n)
\end{aligned}$$

par linéarité du déterminant selon la dernière colonne. Or, $y \in F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Ainsi, $G(e_1, \ldots, e_n, y) = 0$. Ainsi :

$$d(x,F)^2 = \|z\|^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}.$$

$\square$

On est prêt à démontrer le théorème de Müntz.

Démonstration. **Étape 1 : Utilisation du théorème de Weierstrass pour simplifier le problème**
Par le théorème de Weierstrass, on a que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$, donc dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ étant donné que :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par linéarité, donc, dire que V est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ (resp. dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$) revient donc à dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le monôme x^k appartient à $\overline{V}$. C'est ce que l'on va chercher à caractériser dans la suite de la preuve. Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, le sous-espace de dimension finie $V_N := \text{Vect}\left(\{x^{\alpha_n}, n \in [\![0,N]\!]\}\right)$. Dire que V est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ revient donc à dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d\left(x^k, V_N\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

On va donc utiliser les déterminants de Gram pour calculer cette distance.

Étape 2 : Utilisation des déterminants de Gram pour calculer la distance d'un monôme à V_N.
Étant donné que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, la famille $(x^{\alpha_0}, \ldots, x^{\alpha_N})$ est une base de V_N et on peut donc utiliser la proposition 3.30. Calculons donc les matrices de Gram intervenant dans le calcul :

$$\begin{aligned}
\text{Gram}\left(x^{\alpha_0}, \ldots, x^{\alpha_n}, x^k\right) &= \begin{pmatrix} \langle x^{\alpha_0}, x^{\alpha_0}\rangle & \cdots & \langle x^{\alpha_0}, x^{\alpha_N}\rangle & \langle x^{\alpha_0}, x^k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x^{\alpha_N}, x^{\alpha_0}\rangle & \cdots & \langle x^{\alpha_N}, x^{\alpha_N}\rangle & \langle x^{\alpha_N}, x^k\rangle \\ \langle x^k, x^{\alpha_0}\rangle & \cdots & \langle x^k, x^{\alpha_N}\rangle & \langle x^k, x^k\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_0+\alpha_0+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_0+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_0+k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_N+\alpha_0+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_N+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_N+k+1} \\ \frac{1}{k+\alpha_0+1} & \cdots & \frac{1}{k+\alpha_N+1} & \frac{1}{k+k+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice est donc un déterminant de Cauchy associé aux familles $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N, k)$ et $(\alpha_0 + 1, \ldots, \alpha_N + 1, k+1)$. Ainsi :

$$G\left(x^{\alpha_0}, \ldots, x^{\alpha_N}, x^k\right) = \frac{\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \times \prod_{i=0}^{N} (\alpha_i - k)^2}{\displaystyle\prod_{0\leqslant i,j\leqslant N} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \times \prod_{i=0}^{N} (\alpha_i + k + 1)^2 \times (2k+1)}.$$

Explicitons les termes, parce que ça peut ne pas être clair. Si on note $(a_1, \ldots, a_{N+2}) := (\alpha_0, \ldots, \alpha_N, k)$ et $(b_1, \ldots, b_{N+2}) := (\alpha_0 + 1, \ldots, \alpha_N + 1, k+1)$, alors on a :

$$\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N+1} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

et :

$$\prod_{i=0}^{N}(\alpha_i - k)^2 = \prod_{i=1}^{N+1}(a_i - a_{N+2})(b_i - b_{N+2}),$$

ce qui donne bien :

$$\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N}(\alpha_i - \alpha_j)^2 \times \prod_{i=0}^{N}(\alpha_i - k)^2 = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N+2}(a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

qui est bien le numérateur du déterminant de Cauchy. Maintenant, pour le dénominateur, on a :

$$\prod_{0\leqslant i,j\leqslant N}(\alpha_i + \alpha_j + 1) = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant N+1}(a_i + b_j).$$

Également :

$$\prod_{i=0}^{N}(\alpha_i + k + 1)^2 = \prod_{i=1}^{N+2}(a_i + b_{N+2}) \times \prod_{j=1}^{N+2}(a_{N+2} + b_j),$$

et enfin :

$$2k + 1 = a_{N+2} + b_{N+2},$$

ce qui donne bien :

$$\prod_{0\leqslant i,j\leqslant N}(\alpha_i + \alpha_j + 1) \times \prod_{i=0}^{N}(\alpha_i + k + 1)^2 \times (2k+1) = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant N+2}(a_i + b_j),$$

qui est le dénominateur du déterminant de Cauchy. De même, on a :

$$G\left(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N}(\alpha_i - \alpha_j)^2}{\displaystyle\prod_{0\leqslant i,j\leqslant N}(\alpha_i + \alpha_j + 1)}.$$

Ainsi :

$$\Delta_N(k) := d\left(x^k, V_N\right) = \sqrt{\frac{G\left(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N}, x^k\right)}{G\left(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\prod_{i=0}^{N}\left|\frac{\alpha_i - k}{\alpha_i + k + 1}\right|.$$

À partir de là, raisonnons par double implication :
$\Rightarrow$: Supposons V dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \prod_{i=0}^{N}\frac{\alpha_i - k}{\alpha_i + k + 1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Si la suite (α_n) est majorée, alors la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge grossièrement. Dans le cas contraire, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe α_{i_k} tel que $\alpha_{i_k} = k$, alors la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est minorée par la série harmonique, qui diverge. Il ne reste plus qu'à considérer un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n \neq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étant donné que la suite (α_n) diverge, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n > k$ pour tout $n \geqslant N_0$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N_0, \quad u_n := \ln\left(\frac{\alpha_n - k}{\alpha_n + k + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2k+1}{\alpha_n + k + 1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2k+1}{\alpha_n + k + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2k+1}{\alpha_n}. \tag{1}$$

Or, la limite $\prod_{i=0}^{N} \frac{\alpha_i - k}{\alpha_i + k + 1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ indique que $\sum_{n \geqslant N_0} u_n = -\infty$. En effet, on a :

$$\prod_{i=0}^{N} \frac{\alpha_i - k}{\alpha_i + k + 1} = \underbrace{\prod_{i=0}^{N_0-1} \frac{\alpha_i - k}{\alpha_i + k + 1}}_{\neq 0} \times \exp\left(\sum_{n=N_0}^{N} u_n\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, par équivalence de suites à termes négatifs, on a que la série $\sum \frac{2k+1}{\alpha_n}$ diverge, donc $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge également.
$\Leftarrow$: Supposons que la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge et montrons que $\Delta_N(k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $k \in \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$, c'est clair : la suite est stationnaire à 0 à partir d'un certain rang. Prenons alors k différent des α_n. Si (α_n) est majorée, elle converge vers une limite ℓ, qui est son sup. Dans ce cas, la suite :

$$v_n := \left(\frac{\alpha_n - k}{\alpha_n + k + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est de signe constant à partir d'un certain rang (ou bien négatif si $k \geqslant \ell$ ou bien positif si $k < \ell$). Le cas $k < \ell$ se traite comme plus haut : la suite (u_n) est bien définie et converge vers une limite non-nulle strictement négative. Ainsi, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement vers $-\infty$ et donc $\Delta_N(k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Si $k \geqslant \ell$, la suite (v_n) est toujours strictement négative. On a alors :

$$\ln(|v_n|) = \ln\left(\frac{k - \alpha_n}{\alpha_n + k + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2\alpha_n + 1}{\alpha_n + k + 1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(1 - \frac{2\ell + 1}{k + \ell + 1}\right) \in \mathbb{R}^{-*} \cup \{-\infty\}.$$

Ainsi, la série $\sum \ln(|v_n|)$ diverge grossièrement et donc, par le même argument que précédemment, $\Delta_N(k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
Si maintenant $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, les calculs effectués à partir de (1) restent valide et l'équivalent montre que $\sum u_n$ diverge vers $-\infty$ étant donné que $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge, et donc $\Delta_N(k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. On a donc, d'après l'étape 1, que $\overline{V} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ (en tous cas, pour la norme $\|\cdot\|_2$) !

Étape 3 : Approximation uniforme sous les conditions de l'énoncé

Supposons donc (α_n) tel que $\alpha_0 = 1$, (α_n) strictement croissante tendant vers une limite $\ell \in (1, +\infty]$.
$\Rightarrow$: Si V est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$, alors V est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ et donc, d'après ce qui précède, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.
$\Leftarrow$: Réciproquement, si $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge, alors, quitte à extraire la suite (α_n), qui tend vers une limite strictement plus grande que 1, on peut supposer $\alpha_1 > 1$. Rappelons qu'en vertu du théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que $x^k \in \overline{V}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons donc $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\alpha_0 = 0$, on a déjà que $1 \in V$. On peut donc supposer $k \in \mathbb{N}^*$. Étant donné que (α_n) converge vers $\ell \in (1, +\infty]$ et que $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge, on a que $\sum \frac{1}{\alpha_n - 1}$ diverge aussi (elle diverge grossièrement si ℓ est finie et diverge également si $\ell = +\infty$ car alors $\frac{1}{\alpha_n - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha_n}$ et on conclut par sommation des équivalents). Ainsi, d'après le cas précédent d'approximation en norme euclidienne, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\left(\left(x^{\alpha_n - 1}\right)_{n\geqslant 1}\right)$ tel que :

$$\left\|kx^{k-1} - g_\varepsilon\right\|_2 < \varepsilon.$$

Soit alors h_ε la primitive de g_ε telle que $h_\varepsilon(0) = 0$. On a alors, par intégration, que $h_\varepsilon \in V$. On a alors :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|x^k - h_\varepsilon(x)\right| = \left|\int_0^x \left(kx^{k-1} - g_\varepsilon(x)\right) \mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{x} \left(\int_0^x \left(kx^{k-1} - g_\varepsilon(x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\|kx^{k-1} - g_\varepsilon\right\|_2 < \varepsilon.$$

On a alors que $\left\|x^k - h_\varepsilon\right\| < \varepsilon$ et donc on a bien montré que $\overline{V} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, ce qui conclut la preuve ! $\square$

Remarque 3.8.2 (L'idée pour passer au cas uniforme)**.** *La difficulté pour passer de l'approximation en norme euclidienne à l'approximation en norme uniforme résidait dans le contrôle de la norme $\|\cdot\|_\infty$ par la norme eucli-*

dienne, ce qui ne peut se faire qu'en imposant une régularité au moins $\mathscr{C}^1$, d'où l'idée de regarder la famille $\left(x^{\alpha_n - 1}\right)$ pour pouvoir ensuite intégrer !

Remarque 3.8.3. *J'ai énormément détaillé ce développement car on peut vite se perdre dans les calculs et le Gourdon ne détaille pas tant que ça ! Évidemment, il faut passer vite et éclipser les détails, mais si vous n'êtes pas solides sur vos appuis, ça peut faire mal à l'arrivée !*